**Tema 2.1. Variables Aleatorias Continuas.**

**Motivación del tema.** La magnitud de un sismo, en la escala de Richter, es un ejemplo de una variable aleatoria continua , esto se debe a que la magnitud puede ser cualquier número del intervalo .



Utilizamos la notación para indicar el evento de que la magnitud del sismo esté entre 2 y 4, y con su probabilidad. A la variable aleatoria le asociamos su función de densidad



La cual tiene la propiedad de que está dada por el área bajo la curva entre

**Definición 1.** **Variable Aleatoria Continua.** Una variable aleatoria es una función de un espacio muestral en el conjunto de los números reales , y es continua si su recorrido es un intervalo de números reales.

ℝ

**Ejemplo 1.** Se selecciona un estudiante de una universidad y se mide su peso. En este caso el espacio muestral está formado por los estudiantes. Definimos una variable aleatoria

.

La variable aleatoria es continua porque su rango puede ser .

**Ejemplo 2.** Se tienen 30 recipientes para medir la cantidad de agua que cae durante un mes. El espacio muestral está formado por los 30 recipientes y podemos definir una variable aleatoria

.

La variable aleatoria es continua porque su rango puede ser .

**Definición 2. Eventos Definidos con Desigualdades.** Para una variable aleatoria continua definimos:

* . Los elementos del espacio muestral que bajo caen en .

* . Los elementos del espacio muestral que bajo son menores o iguales a

* . Los elementos del espacio muestral que bajo caen en el intervalo
* . Los elementos del espacio muestral que bajo caen en el intervalo .

**Ejemplo 3.** Para el ejemplo 1 se tienen los eventos

* Los estudiantes que pesan 60 kilogramos.
* Los estudiantes que pesan entre 40 y 80 kilogramos.
* Los estudiantes que pesan más de 70 kilogramos.

**Observación 1.** Observe que a estos eventos se les puede calcular su probabilidad. Por ejemplo, . ¿por qué cero? , pues si medimos el peso de los estudiantes con mucha precisión ninguno va a pesar 60 kilogramos. En cambio si buscamos los estudiantes cuyo peso está entre 40 y 80 kilogramos, allí si vamos a obtener un porcentaje de estudiantes.

**Definición 3. Función de Densidad.** Sea una variable aleatoria. Decimos que la función es la función de densidad asociada a la variable aleatoria si se satisfacen las propiedades



**Ejemplo 1.**  Sea *X* una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad:

(a) Evalúe *k* y (b) Encuentre .

**Solución.** (a) Por la propiedad 3 tenemos



Ahora como la función de densidad vale cero antes de 0 y después de 3 entonces

De la última ecuación despejamos para obtener

(b) es el área B que está debajo de la gráfica de entre y , como se muestra en la figura 1, entonces por la propiedad 2 de la definición 3:

**Ejemplo 2.**  Sea *X* una variable aleatoria continua cuya función de densidad forma un triángulo isósceles, de altura , por encima del intervalo unitario y vale cero fuera de este intervalo.

1. Encuentre , la altura del triángulo y b) Encuentre la fórmula que define a , (c) calcular .

**Solución.**

(a) La región sombreada A en la figura 2 debe tener área 1, de donde

1. Observe que es lineal entre y con una pendiente (2/(1/2)) = 4 y es lineal entre y con pendiente -4. De donde

1. Como sabemos de la definición de probabilidad condicional

**Ejercicios.**

1. Para determinar el grado de inteligencia se mide el tiempo que tarda un ratón un ratón en recorrer un laberinto para encontrar la comida. El tiempo en segundos, que emplea un ratón es una variable aleatoria con una función de densidad dada por

En donde es el tiempo mínimo para recorrer el laberinto, (a) demostrar que , (b) Calcular .

Respuesta: (b) b/(b+c)

1. Suponga que la variable aleatoria tiene una función de densidad de probabilidad dada por
2. Obtenga el valor de que hace de una función de densidad, (b) Con EXCEL trace la gráfica de .

Respuesta: 1/96.

1. Una variable aleatoria tiene función de densidad

Encuentre (a) la constante c, (b) , (c) , (d) , (e) con EXCEL trace la gráfica de

Respuesta: (a) 3, (b) , (c) , (d)

1. Una gasolinera tiene dos bombas, que pueden bombear cada una hasta 10000 galones de gasolina por mes. La cantidad total de gasolina bombeada en un mes es una variable aleatoria (expresada en 10 miles de galones), con una función de densidad de probabilidad dada por
2. Graficar con EXCEL , (b) calcular la probabilidad de que la gasolinera bombee entre 8000 y 12000 galones en un mes, (b) Si se sabe que la gasolinera ha bombeado más de 10000 galones en un mes particular, encuentre la probabilidad de que haya bombeado más de 15000 galones durante el mes.

Respuesta: (b) 0.36, (c) 1/4

**Definición 4. Función de Distribución Acumulada.** Sea una variable aleatoria continua, definimos la función de distribución acumulada o simplemente de como

**Teorema 1. Propiedades de la Función de Densidad y Distribución Acumulada.**

* 1. con la función de densidad.
  2. es monótona creciente, es decir, .
  3. y .

**Ejemplo 3.** Sea una variable aleatoria continua con función de densidad

Encuentre la función de distribución acumulada, después aplique la propiedad 1.2 para obtener la función de densidad.

**Solución.** Como la función de densidad está definida en 3 partes: antes de 0, entre 0 y 2 y después de 2, vamos a dividir el problema en 3 casos:

* Si y tomando en cuenta que vale 0 antes de 0 tenemos:
* Si entonces tomando en cuenta que antes de 0 vale 0 tenemos
* Si y tomando en cuenta que vale 0 antes de 0 y después de 2 tenemos

Así la función de distribución acumulada está definida por:

La gráfica de la función de distribución acumulada es:

Ahora derivamos la función de distribución acumulada para obtener la de densidad y de nuevo contemplamos 3 casos:

* Si
* Si
* Si

**Ejemplo 4.** Obtenga la función de distribución acumulada a partir de la función de densidad del ejemplo 2

**Solución.** Como esta función está definida en 4 intervalos: y en donde la función vale y 0 respectivamente, debemos contemplar 4 casos:

* Si
* Si dividimos la integral en 2
* Si dividimos la integral en 3
* Si dividimos la integral en 4

Juntando los diferentes casos podemos concluir que la función de distribución acumulada está definida como:

Observe que la división de una integral en varias se debe a que la fórmula de cambia en cada intervalo. ¿Qué obtiene si deriva la función de distribución acumulada? ¿Cuál es la gráfica de ?

**Ejemplo 5.** Sea una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por

Encuentre la función de distribución acumulada.

**Solución.** Como

Debemos considerar 2 casos

* .

Por lo tanto la función de distribución acumulada está definida como:

**Teorema 2. Más Propiedades de la Función de Distribución Acumulada.** Sea una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada entonces

**Demostración.** Demostraremos solamente la primera

**Ejemplo 6.** La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua es

Calcular (a) , (b) , (c) .

**Solución.**  Utilizando las fórmulas del teorema 2 tenemos

**Ejercicios.**

1. (a)Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria cuya función de distribución acumulada es
2. ii)
3. Con i) calcular

Respuesta: (a) (b)

1. La proporción del tiempo por día que todas las cajas registradoras a la salida de un supermercado están ocupadas, es una variable aleatoria con una función de densidad
2. Encuentre el valor de , (b) encuentre la función de distribución acumulada, (c) utilice la función de distribución acumulada para calcular , (d) responda (c) con la función de densidad, (e) derive la función de distribución acumulada para obtener la función de densidad.

Respuesta: (a) , (b) , (c) 0.6254